

SISTEMA DE ECUACIONES DEL MODELAMIENTO DE CABECEO DE UN VEHÍCULO MEDIANTE BOND GRAPH

EQUATION SYSTEM OF THE PITCH MOVEMENT OF A VEHICLE DONE WITH THE BOND GRAPH

JUAN CARLOS PARRA MÁRQUEZ

Departamento de Sistemas de Información, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad del Bío-Bío, Avenida Collao 1202, Casilla 5-C, Teléfono (56-41) 731521, Fax (56-41) 731087, jparra@ubiobio.cl

RESUMEN

El automóvil, por constituirse en uno de los mecanismos de mayor uso por los seres humanos en el día a día, es un sistema de estudio que concentra una gran cantidad de investigadores, particularmente en el tema de su dinámica. En este contexto, se han definido múltiples modelos para sus diversos movimientos entre los que podemos mencionar el de cabeceo (pitch). Por ello, este trabajo presenta el modelo matemático de dinámica de vehículo implementado mediante Bond Graph y, a partir de éste, se realizan las simulaciones de validación del mismo para –posteriormente– obtener las ecuaciones de estado del móvil, objetivo final de este estudio. Las validaciones del modelo Bond Graph se han realizado mediante el software de simulación 20-Sim.

Palabras clave: Vehículo, cabeceo, ecuaciones de estado, dinámica, Bond Graph.

ABSTRACT

The automobile by being one of the mechanism of greater everyday use by human beings is a system that concentrate a great number of researchers especially concerning its dynamics. In this context several models have been identified due to its diverse movements, among which we can mention the **pitch**. Therefore this works presents the vehicle dynamic mathematical model obtained through the Bond Graph. The model was implemented by Bond Graph and from there these validation simulations were performed in order to obtain the equations about the state of the automobile, which was the final aim of this study. The validations of the model Bond Graph were performed by using the 20-Sim simulation software

Keywords: Vehicle, pitch, state equations, dynamic, Bond Graph.

Recibido: 04.06.08. Revisado: 19.08.08. Aceptado: 26.08.08.

INTRODUCCIÓN

Dentro de los diversos sistemas estudiados por el hombre, uno de éstos corresponde al análisis del comportamiento dinámico de los vehículos, medio de transporte utilizado por millones de personas y que concentra un

número no menor de investigaciones alrededor del mundo. En este contexto, se han realizado múltiples modelos definidos por un conjunto de ecuaciones (Cuadrado, 2000) que determinan los grados de libertad que se analizaran en dicho móvil. En esto último, los nuevos avances dictan que el mode-

lamiento de un vehículo se esté realizando mediante la teoría de los multicuerpos (Cuadrado, 1997) que permite considerar subsistemas más allá de los permitidos por los métodos clásicos de la mecánica (Chiang, 1999). Es así como, en estos últimos años, los grafos obtenidos mediante la herramienta de diseño Bond Graph han sido un aporte significativo para esta teoría (Breedveld, 2003).

Por lo anterior, en este artículo se presenta el modelo Bond Graph (Broenink, 1999) del sistema vehículo, basado en los ya existentes (de Boer, 2002; Louca *et al.*, 2001; Marquis, 2006), que permite la simulación de aspectos tan relevantes del comportamiento de un vehículo (Ervin *et al.*, 1983), pero analizando el comportamiento longitudinal de tal forma de obtener las ecuaciones de estado (Cuadrado, 2000) mediante algoritmo para tal efecto.

En la última década se ha estrenado una gran variedad de productos de software di-

señados especialmente para el análisis de este tipo de mecanismos; entre éstos, podemos destacar: *Adams*, *Simulink* y *20-Sim* (Broenink, 2003), que permiten trabajar con modelos que requieren las características de eficiencia mencionadas. En particular, en esta investigación se realizan las simulaciones utilizando 20-Sim, el cual ha demostrado ya sus capacidades en muchos otros trabajos de investigación (Filippini *et al.*, 2005).

MODELO

Se comienza el análisis del comportamiento longitudinal del vehículo (Gillespie, 1992), en su movimiento de cabeceo, desarrollando el modelamiento mediante Bond Graph.

Para iniciar el análisis longitudinal se debe tener presente el modelo básico a considerar (Figura 1).

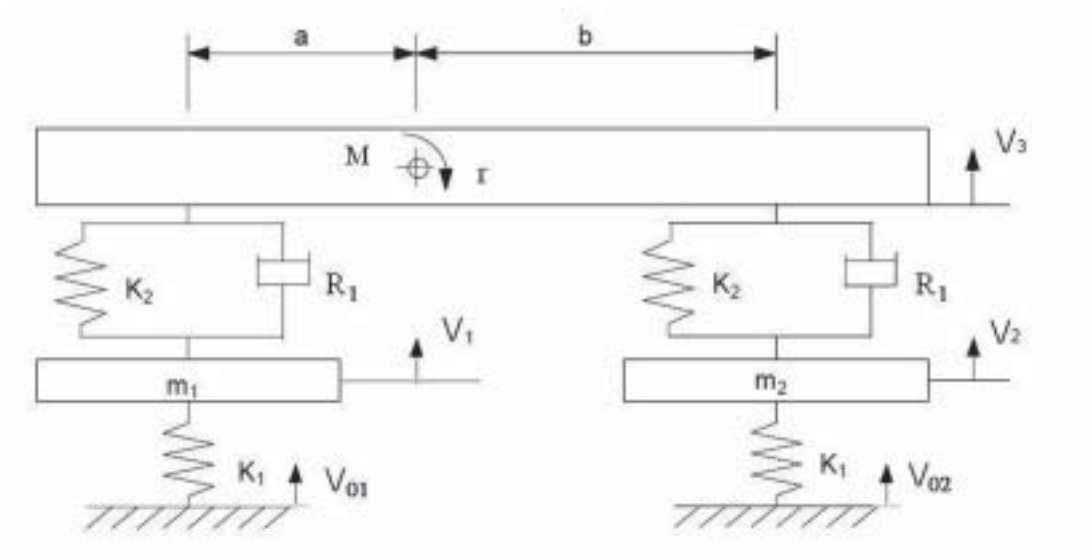


Figura 1. Modelo longitudinal de vehículo.

Este modelo es una composición de dos ruedas con una masa superior que corresponde al chasis. Así, se obtiene el diagrama Bond Graph para él (Figura 2).

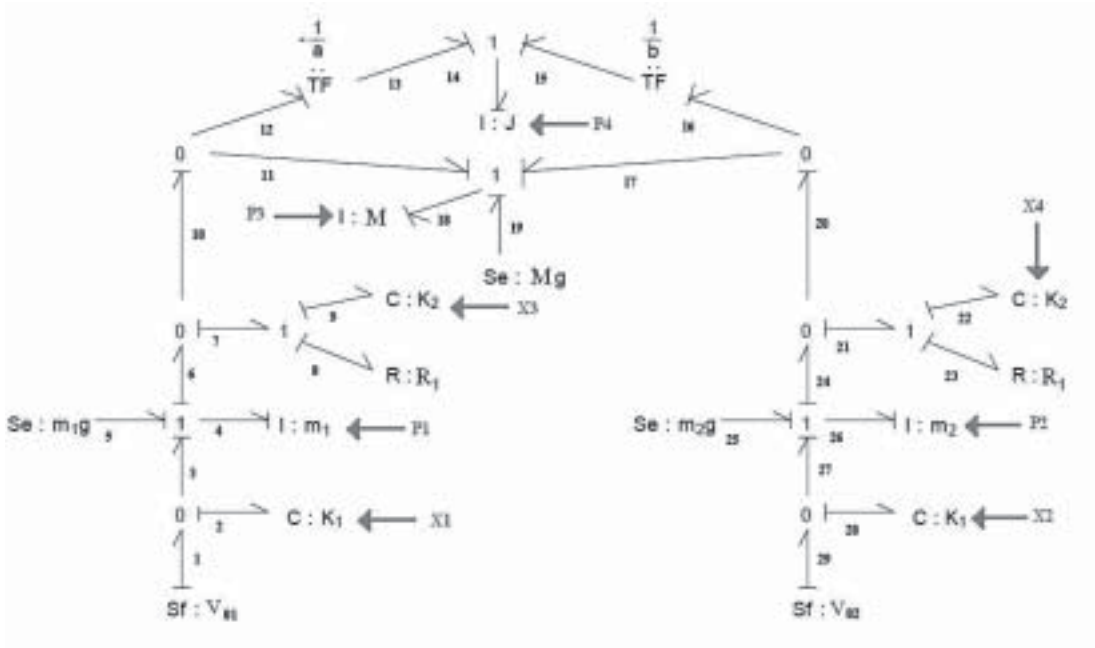


Figura 2. Modelo Bond Graph para movimiento longitudinal.

Para obtener las ecuaciones de estado se procede a determinar los flujos y los esfuerzos en base al diagrama Bond Graph (Figura 2). Primeramente, se identifican las variables (Karlsson *et al.*, 2005) del sistema: desplazamientos x_1 y x_2 para K_1 de las ruedas izquierda y derecha respectivamente, cantidad de movimiento p_1 y p_2 para m_1 y m_2 , desplazamiento x_3 y x_4 para K_2 de los muelles izquierdo y derecho (en la suspensión) y, finalmente, cantidad de movimiento p_3 para M y p_4 para J . Para realizar esta labor se

enumeran los enlaces como muestra la Figura 2.

Se debe señalar que para la obtención de los flujos, válido también para los esfuerzos, se debe proceder en orden a aquellos flujos que, a medida del avance del recorrido, se vayan obteniendo; por ello, el recorrido no tiene por qué ser estructurado.

Comentado lo anterior, se comienza a identificar las expresiones en los enlaces del grafo:

$$\begin{array}{lll}
1) & f_1 = V_{01} & 2) f_4 = \frac{P_1}{m_1} & 3) f_6 = f_2 = f_4 = f_3 = \frac{P_1}{m_1} \\
4) & f_2 = f_1 - f_3 = V_{01} - \frac{P_1}{m_1} & 5) f_7 = f_4 = f_9 \\
6) & f_7 = f_6 - f_{10} = \frac{P_1}{m_1} + \frac{P_4}{m_1} a - \frac{P_2}{M} & 7) f_{18} = \frac{P_2}{M} \\
8) & f_{18} = f_{19} = f_{17} = f_{11} = \frac{P_2}{M} & 9) f_{10} = f_{12} + f_{13} = -\frac{P_4}{J} a + \frac{P_2}{M} \\
10) & f_{12} = -a \cdot f_{13} = -\frac{P_4}{J} a & 11) f_{14} = \frac{P_4}{J} \\
12) & f_{14} = f_{15} = f_{13} = \frac{P_4}{J} & 13) f_{20} = f_{17} + f_{16} = \frac{P_2}{M} + \frac{P_4}{J} b \\
14) & f_{16} = b \cdot f_{15} = \frac{P_4}{J} b & 15) f_{29} = V_{02} & 16) f_{26} = \frac{P_2}{m_2} \\
17) & f_{25} = f_{27} = f_{26} = f_{24} = \frac{P_2}{m_2} & 18) f_{28} = f_{29} - f_{27} = V_{02} - \frac{P_2}{m_2} \\
19) & f_{22} = f_{21} = f_{23} = \frac{P_2}{m_2} - \frac{P_3}{M} + \frac{P_4}{J} b
\end{array}$$

Ahora, para los esfuerzos:

$$\begin{array}{lll}
1) & e_2 = K_1 x_1 & 2) e_1 = e_2 = e_3 = K_1 x_1 & 3) e_5 = -m_1 g \\
4) & e_9 = f_9 R_1 = \left(\frac{P_1}{m_1} + \frac{P_4}{J} a - \frac{P_2}{M} \right) R_1 & 5) e_4 = K_2 x_3 \\
6) & e_7 = e_8 + e_9 = K_2 x_3 + \left(\frac{P_1}{m_1} + \frac{P_4}{J} a - \frac{P_2}{M} \right) R_1 \\
7) & e_{10} = e_7 = e_8 = K_2 x_3 + \left(\frac{P_1}{m_1} + \frac{P_4}{J} a - \frac{P_2}{M} \right) R_1 \\
8) & e_4 = e_5 + e_3 - e_6 = K_1 x_1 - K_2 x_3 - \left(\frac{P_1}{m_1} + \frac{P_4}{J} a - \frac{P_2}{M} \right) R_1 - m_1 g \\
9) & e_{11} = e_{12} = e_{10} = K_2 x_3 + \left(\frac{P_1}{m_1} + \frac{P_4}{J} a - \frac{P_2}{M} \right) R_1 \\
10) & e_{13} = -a \cdot e_{12} = -K_2 x_3 a + \left(\frac{P_1}{m_1} a + \frac{P_4}{J} a^2 - \frac{P_2}{M} a \right) R_1 & 11) e_{19} = -M \cdot g \\
12) & e_{28} = K_1 x_2 & 13) e_{25} = -m_2 g & 14) e_{29} = e_{28} = e_{27} = K_1 x_2 \\
15) & e_{22} = K_2 x_4 & 16) e_{23} = f_{23} R_1 = \left(\frac{P_2}{m_2} - \frac{P_3}{M} + \frac{P_4}{J} b \right) R_1
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad e_{21} &= e_{22} + e_{23} = K_2 x_4 + \left(\frac{P_2}{m_2} - \frac{P_3}{M} + \frac{P_4}{J} b \right) R_1 \\
 18) \quad e_{21} &= e_{20} = e_{24} \\
 19) \quad e_{26} &= e_{28} + e_{27} - e_{24} = -m_2 g + K_1 x_2 - K_2 x_4 - \left(\frac{P_2}{m_2} - \frac{P_3}{M} + \frac{P_4}{J} b \right) R_1 \\
 20) \quad e_{16} &= e_{17} = e_{20} \quad 21) \quad e_{15} = b \cdot e_{16} = K_2 x_4 b + \left(\frac{P_2}{m_2} b - \frac{P_3}{M} b + \frac{P_4}{J} b^2 \right) R_1 \\
 22) \quad e_{14} &= e_{13} + e_{15} = -K_2 x_3 a + K_2 x_4 b + \left(\frac{P_1}{m_1} a + \frac{P_4}{J} a^2 - \frac{P_3}{M} a \right) R_1 + \left(\frac{P_2}{m_2} b - \frac{P_3}{M} b + \frac{P_4}{J} b^2 \right) R_1 \\
 23) \quad e_{18} &= e_{11} + e_{19} + e_{17} = K_2 x_3 + K_2 x_4 + \left(\frac{P_1}{m_1} + \frac{P_4}{J} a - \frac{P_3}{M} \right) R_1 + \left(\frac{P_2}{m_2} - \frac{P_3}{M} + \frac{P_4}{J} b \right) R_1 - M \cdot g
 \end{aligned}$$

Obtenidos todos los flujos y esfuerzos, se procede a determinar las expresiones finales para las variables de estado; es así como:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1}{dt} &= m_1 a_1 = e_4 = K_1 x_1 - K_2 x_3 - \frac{R_1}{m_1} p_1 - \frac{R_1 a}{J} p_4 + \frac{R_1}{M} p_3 - m_1 g \\
 \frac{dp_2}{dt} &= m_2 a_2 = e_{26} = K_1 x_2 - K_2 x_4 - \frac{R_1}{m_2} p_2 + \frac{R_1}{M} p_3 - \frac{R_1 b}{J} p_4 - m_2 g \\
 \frac{dp_3}{dt} &= M \cdot a_3 = e_{18} = K_2 x_3 + K_2 x_4 + \frac{R_1}{m_1} p_1 + \frac{R_1(a+b)}{J} p_4 - 2 \frac{R_1}{M} p_3 + \frac{R_1}{m_2} p_2 - M \cdot g \\
 \frac{dp_4}{dt} &= J \cdot \alpha_4 = e_{14} = -K_2 x_3 a + K_2 x_4 b + \frac{R_1 a}{m_1} p_1 + \frac{R_1 b}{m_2} p_2 - \frac{R_1(a+b)}{M} p_3 + \frac{R_1(a^2+b^2)}{J} p_4 \\
 \frac{dx_1}{dt} &= f_2 = V_{01} - \frac{1}{m_1} p_1 \\
 \frac{dx_2}{dt} &= f_{28} = V_{02} - \frac{1}{m_2} p_2 \\
 \frac{dx_3}{dt} &= f_8 = \frac{1}{m_1} p_1 + \frac{a}{J} p_4 - \frac{1}{M} p_3 \\
 \frac{dx_4}{dt} &= f_{22} = \frac{1}{m_2} p_2 - \frac{1}{M} p_3 + \frac{b}{J} p_4
 \end{aligned}$$

Donde a_1 es la aceleración de m_p , a_2 de m_2 , a_3 de m_3 y a_4 es la aceleración angular del chasis. El sistema final se puede representar, matricialmente, como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{m_1} & 0 & \frac{R_1}{M} & -\frac{R_1}{J}a & K_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & -\frac{R_1}{m_2} & \frac{R_1}{M} & -\frac{R_1}{J}b & 0 & K_1 & 0 & -K_2 \\ \frac{R_1}{m_1} & \frac{R_1}{m_2} & -2\frac{R_1}{M} & \frac{R_1}{J}(a+b) & 0 & 0 & K_2 & K_2 \\ \frac{R_1}{m_1}a & \frac{R_1}{m_2}b & -\frac{R_1}{M}(a+b) & \frac{R_1}{J}(a^2+b^2) & 0 & 0 & -K_2a & K_2b \\ -\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 & -\frac{1}{M} & \frac{1}{J}a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & -\frac{1}{M} & \frac{1}{J}b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_1g \\ -m_2g \\ 0 \\ 0 \\ V_{01} \\ V_{02} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde

- p_1 momentum lineal en el eje Z de la rueda 1.
- p_2 momentum lineal en el eje Z de la rueda 2.
- p_3 momentum lineal en el eje Z del chasis.
- p_4 momentum circular en el eje Y del chasis.
- x_1 desplazamiento vertical del neumático en la rueda delantera.
- x_2 desplazamiento vertical del neumático en la rueda trasera.
- x_3 desplazamiento vertical de la suspensión en la rueda delantera.
- x_4 desplazamiento vertical de la suspensión en la rueda trasera.
- K_1 constante de estiramiento del neumático en cada rueda.

- K_2 constante de estiramiento del resorte de amortiguación en cada rueda.
- R_1, R_2 constante de amortiguación en cada rueda.
- M masa del chasis.
- m_1 masa de las ruedas delanteras (neumático más llanta).
- m_2 masa de las ruedas traseras (neumático más llanta).
- g aceleración de gravedad.
- CG Centro de Gravedad.
- a longitud desde el eje delantero al CG.
- b longitud desde el eje trasero al CG.
- J inercia rotacional del chasis.
- V_0 Velocidades presentes en el punto de contacto neumático-calzada producto de las imperfecciones de la calzada (carretera).

RESULTADOS

Los resultados se obtienen a partir de las si-

mulaciones en 20-Sim. El modelo implementado se muestra en la Figura 3.

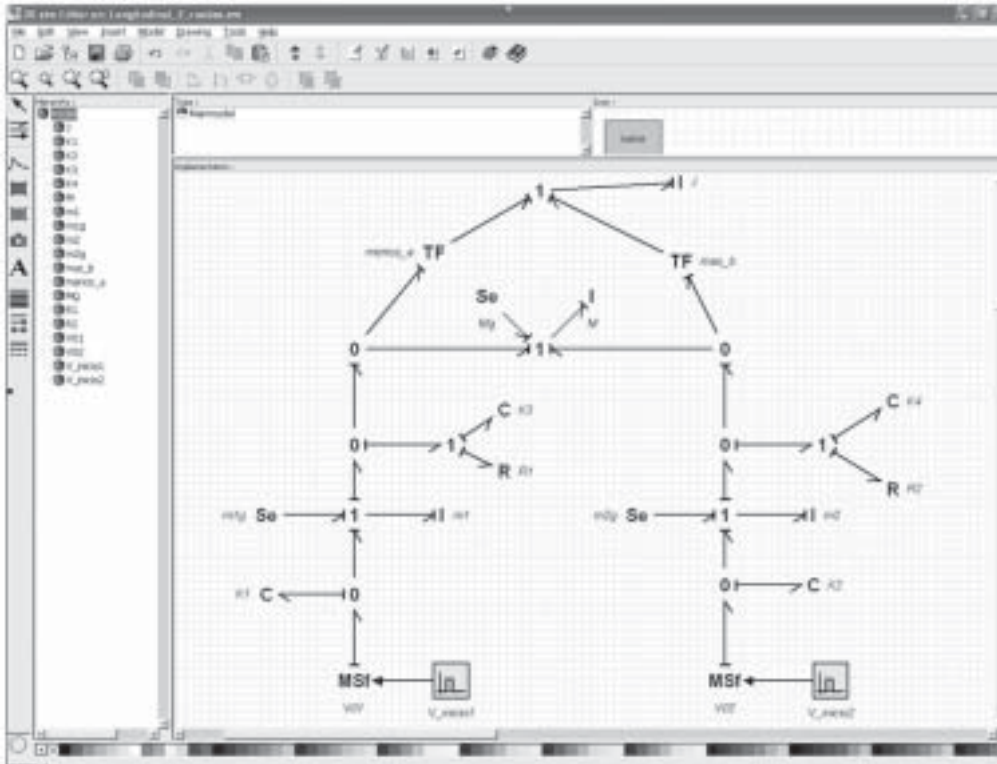


Figura 3. Implementación 20-Sim de modelo longitudinal de 2 ruedas.

La simulación, para entradas de velocidad vertical de calzada nula (sin obstáculos), entrega que la velocidad angular, W , es cero y la velocidad vertical del chasis, V , oscila durante unos instantes, al comienzo del movimiento, por motivos del asentamiento del

peso tanto de ruedas como del chasis (Figura 4.15). En dicha gráfica se considera el centro de masas ubicado a igual distancia de los ejes y los parámetros de las ruedas delanteras y traseras idénticos.

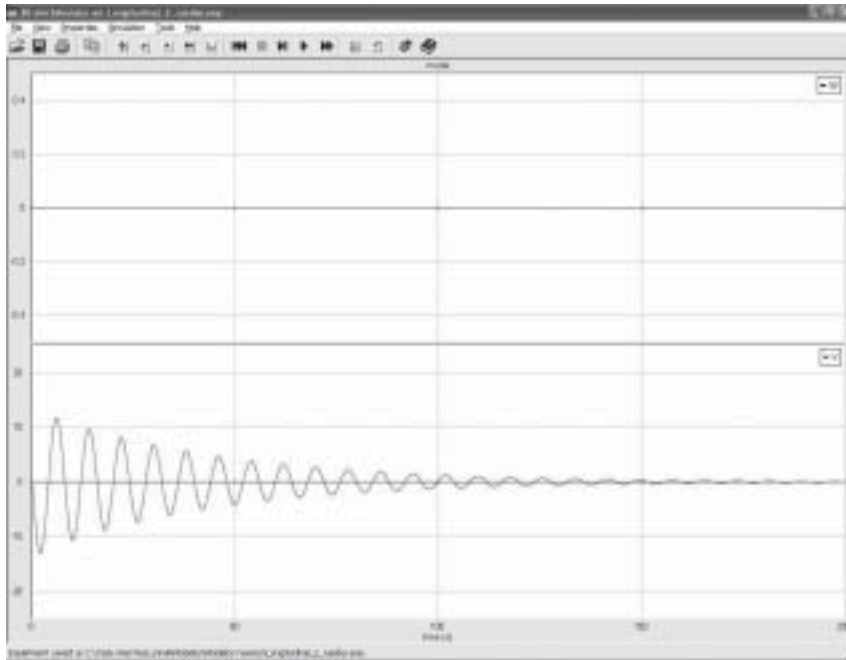


Figura 4. Comportamiento de V y W (en el chasis) con ejes a igual distancia del CG y estimulación de la calzada, nula.

También se puede analizar el comportamiento de las velocidades en las ruedas, tanto delanteras como traseras (Figura 5).

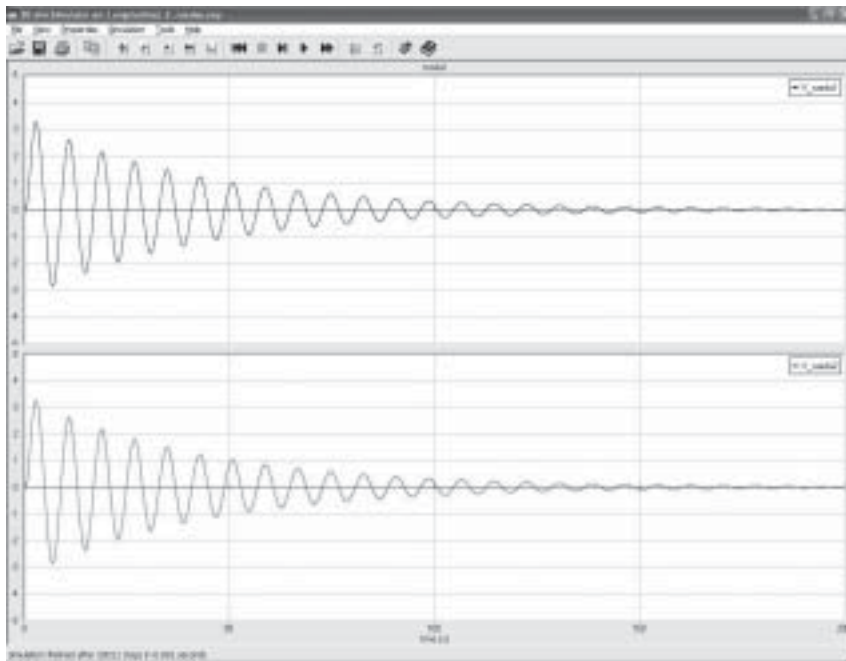


Figura 5. Comportamiento de la velocidad de ruedas delanteras y traseras.

Es claro ver que las velocidades de las ruedas, en ambos ejes, son similares y las oscilaciones debidas a los resortes son atenuadas por el efecto producido en el amortiguamiento.

Finalmente, otra simulación interesante

es cuando las distancias de los ejes, con respecto al CG, son distintas (Figura 6). En dicha gráfica podemos constatar que la velocidad angular ya no es cero, aunque al transcurrir el tiempo se estabiliza.

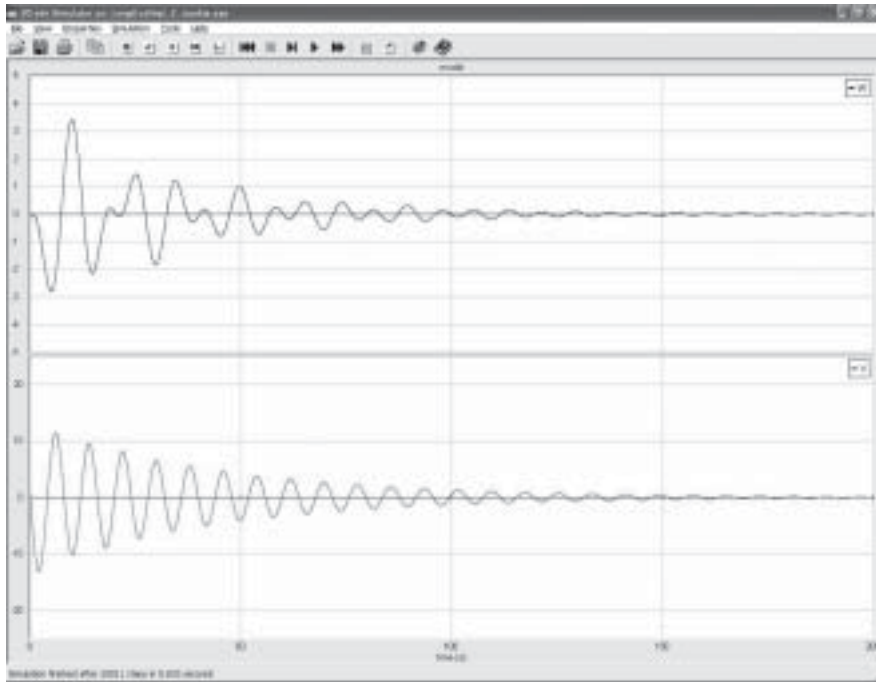


Figura 6. Simulación de V y W con longitudes distintas de los ejes al CG.

Para estas mismas condiciones se puede constatar que las velocidades de las ruedas

(ejes) varían (Figura 5).

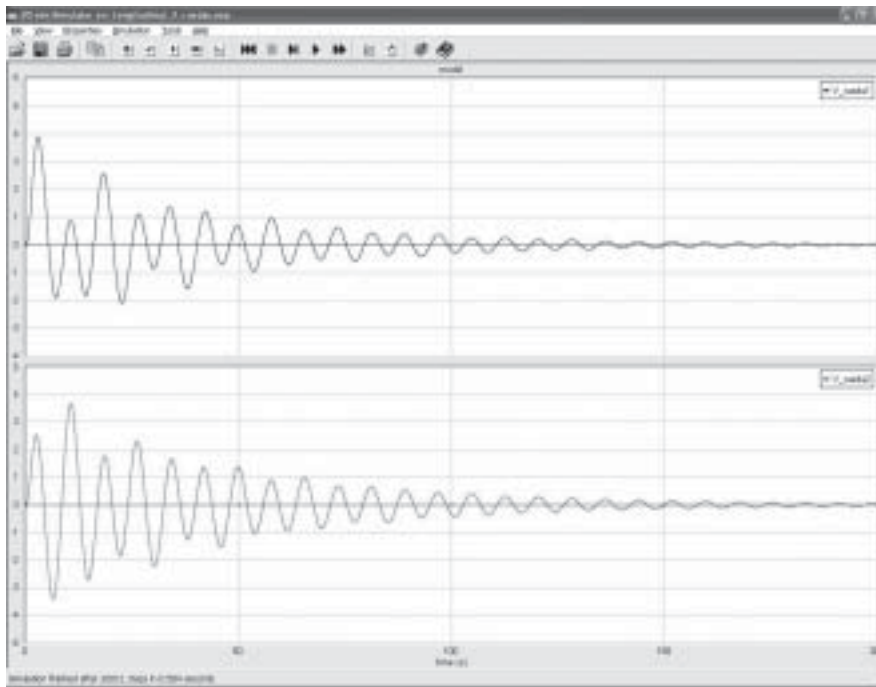


Figura 7. Comportamiento de las velocidades en los ejes, con distinta distancia al CG.

Aquí se puede ver claramente que las velocidades son distintas produciendo una leve, pero mayor velocidad en las ruedas delanteras hacia donde hemos acercado el CG del vehículo.

CONCLUSIONES

Primeramente, se puede señalar que el efecto de los componentes de la amortiguación en un vehículo es esencial para lograr su estabilidad y comodidad de los pasajeros del mismo. Según sean los valores de los parámetros se tendrá una reposición del equilibrio adecuada al tiempo de su restitución. Con los datos utilizados se logra una restitución a los 10 segundos pero al modificar estos pará-

metros se puede lograr la restitución antes o después de este tiempo.

Los resultados de las simulaciones demuestran adecuada predicción a los fenómenos cotidianos de los sucesos verticales que se producen en una conducción como es el caso, por ejemplo, de un bache en la carretera en un camino de ripio, el cual transfiere una determinada velocidad vertical a los neumáticos. Es claro que la amortiguación, junto al resorte de la misma, son las variables a manipular para lograr que la oscilación del móvil se atenúe lo más prontamente posible y su periodo sea lo más corto alcanzable.

Por otra parte, Bond Graph permite una implementación del modelo rápidamente logrando obtener algorítmica y sistemáticamente las expresiones matemáticas que pue-

den ser implementadas fácilmente en otra herramienta de simulación. Esto último es lo relevante de este trabajo, en el que se han obtenido las ecuaciones de estado que permiten que el movimiento de cabeceo de un vehículo pueda ser implementado en cualquier otro software.

Finalmente, el software 20-Sim ha permitido lograr la simulación del modelo de forma eficiente permitiendo realizar adecuadamente cambios de los valores de los parámetros para los análisis pertinentes.

REFERENCIAS

- BREEDVELD, P.C. (2003) "Bond Graph. Encyclopedia of Life Support Systems contribution". P.C. Breedveld, Holten, University of Twente.
- BROENINK, J.F. (1999) "Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graph". University of Twente, Dept. EE.
- BROENINK, J.F. (2003) "Tutorial Introduction to 20-Sim 3.6". Adapted to 3.6 by Peter Breedveld, University of Twente, EE Department, Enschede, Netherlands.
- CHIANG, L. (1999) "Análisis Dinámico de Sistema Mecánicos", Alfaomega.
- CUADRADO, J. (1997) "Modeling and Solution Methods for Efficient Real-Time Simulation of Multibody Dynamics", *Multibody System Dynamics*, Vol. 1, p.259.
- CUADRADO, J. (2000) "Intelligent Simulation of Multibody Dynamics: Space-State and Descriptor Methods in Sequential and Parallel Computing Environments", *Multibody System Dynamics*, Vol. 4, p. 55.
- DE BOER, G.R. (2002) "A physical multi-body car model using 3D (screw) bond graph". M.Sc. Thesis, Universiteit Twente, Netherlands, June.
- ERVIN, R.D.; NISONGER, R.L.; SAYERS, M.; GILLESPIE, T.D.; FANCHER, P.S. (1983) "Influence of size and weight variables on the stability and control properties of heavy trucks". Final Report, Contract N° FH-11-9577, UMTRI Report N° UMTRI-83-10, March.
- FILIPPINI, G.; NIGRO, N. AND JUNCO, S. (2005) "Vehicle dynamics simulation using bond graph". Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
- GILLESPIE, T.D. (1992) "Fundamentals of vehicle dynamics". Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers.
- KARLSSON, B.; OHLSSON, E.; WETTER, J. AND NILSSON, W. (2005) "CarSim. A suspension system model". Linköping University, Dept. of Science and Technology, TNM032 Modelling Project, December.
- LOUCA, L.S.; STEIN, J.L. AND RIDEOUT, D.G. (2001) "Generating Proper Integrated Dynamic Models for Vehicle Mobility Using a Bond Graph Formulation". Proceeding of the 2001 International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, Phoenix.
- MARQUIS-FAVRE, W. (2006) "Mechatronics bond graph modelling of an automotive vehicle". *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, Vol. 12, N° 2-3, April-June, 2006, pp. 189-202.